Actividades y Cálculos en los EQUINOCCIOS Y SOLSTICIOS

Ederlinda Viñuales Gavín
Tesorera de NASE-IAU. España

Abstract

Our students, from small, know the four seasons of the year and when each of them begins. Of equinoxes and solstices they have knowledge later. But students who enjoy astronomy should know that, in addition to knowing that there are equinoxes and solstices and that on these dates the changes of seasons take place, they can also perform activities and calculations of those days.
Thus, in this small work, we intend to present a couple of observation, measurement and calculation activities to do during the equinoxes and solstices.
In the equinoxes the following two activities are proposed: 1) how to calculate the latitude of the place of observation and 2) how the Christian Easter is determined.
In solstices, the two activities explained are: 1) measuring the tilt of the earth's axis and 2) how to measure the angular distance on the horizon between the two points where the Sun rises (or sets) at the solstice and the consecutive equinox (or vice versa). And also, between the two days of the solstices of a year.

Introducción

El Sol, a lo largo de un año, describe sobre la Esfera Celeste un círculo máximo *imaginario* llamado ***eclíptic**a*.

Este círculo máximo corta en dos puntos a la Esfera Celeste sobre el Ecuador. El punto de corte ascendente, es decir donde el Sol pasa del hemisferio sur al hemisferio norte, se llama *Punto Aries* (γ), y es el momento de inicio de la *primavera* en el hemisferio norte y cuando el Sol alcanza su máxima altura sobre el Ecuador (unos 23º,5) comienza el *verano*. Después de este momento, el Sol siguiendo la trayectoria de la eclíptica, comienza su camino descendente hasta cruzarse de nuevo con el Ecuador dando lugar al comienzo del *otoño* en ese punto de contacto llamado *Punto Libra* (Ω). Después sigue descendiendo hasta alcanzar su mínima altura bajo el ecuador (-23º,5) dando lugar al comienzo del *invierno*, iniciando de nuevo su ascensión y para repetir un nuevo ciclo (Fig.1).

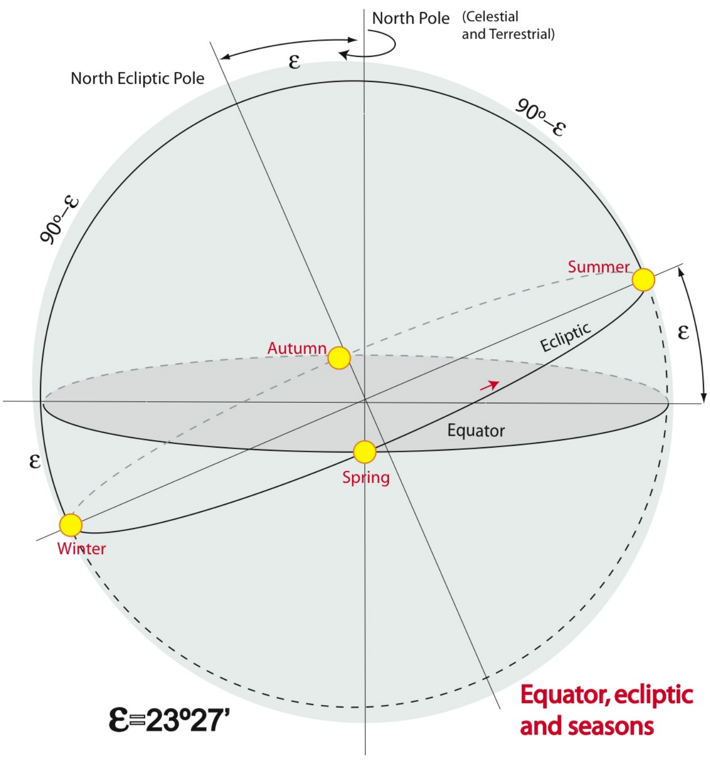


Figura 1: Ecuador, eclíptica y estaciones.

Se llama ***Plano de la eclíptica*** al plano determinado por el ecuador del Sol y la órbita de la Tierra alrededor de éste (Fig.2). En consecuencia, también este plano contiene al recorrido anual aparente del Sol observado desde Tierra. Este plano se encuentra inclinado 23° 27' con respecto al plano del ecuador terrestre.

Los antiguos llamaron eclíptica a la línea del cielo en la que se producían los eclip-ses que coincide con la línea del recorrido anual aparente del Sol a través de las constelaciones del Zodíaco.

La inclinación del plano de la eclíptica respecto del plano del ecuador de 23º,5 aproximadamente, se llama *oblicuidad de la eclíptica*.

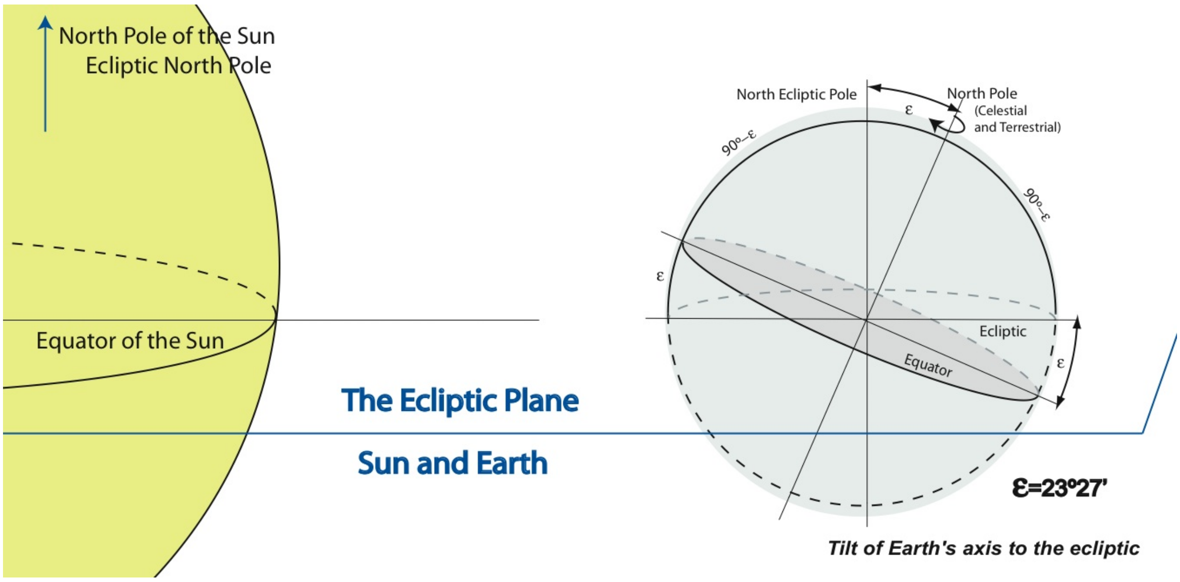


Figura 2: Plano de la eclíptica. Sol, Tierra e inclinación del eje de rotación terrestre.

La oblicuidad de la eclíptica fue medida por el griego Eratóstenes en el siglo III a. C., dándole un valor de 23° 51' 19". Algunos historiadores sugieren que el cálculo de éste fue de 24°, debiéndose el primer dato a posteriores observaciones de Ptolomeo.

Normalmente no se está muy familiarizado con las palabras *eclíptica, plano de la eclíptica u oblicuidad de la eclíptica* pero no cabe duda que la mayor parte de los estudiantes han oído hablar del **Zodiaco** y los signos zodiacales sin saber, que estos términos están relacionados con la eclíptica.
El Zodiaco es una **zona** del **firmamento** a través de la cual pasa la Eclíptica (en términos generales, la línea curva que en apariencia recorre el Sol visto desde la Tierra). En esta zona, una banda de unos 18º de ancha que no es fija sino que se desplaza ligeramente con el tiempo sobre el fondo de la esfera celeste, se incluyen, además del Sol y los planetas, entre 13 y 14 constelaciones. La palabra *Zodiaco* procede del latín *zodiăcus,* y ésta del griego *ζῳδιακός* (*zoon-diakos*, rueda de los animales).

En **Astrología**, el Zodiaco se divide en 12 partes iguales, correspondiendo cada parte a una constelación que se identifica con un signo (Fig.3). Estos **12 signos**, están basados en la cultura babilónica, el Antiguo Egipto y la mitología griega. Se asocian las constelaciones con los siguientes signos: Aries, Tauro, Géminis, Cáncer, Leo, Virgo, Libra, Escorpio, Sagitario, Capricornio, Acuario y Piscis. Se toma como referencia el punto Aries, es decir, el punto de intersección entre la eclíptica y el ecuador celeste. De este modo, cada uno de los 12 signos comprende exactamente un arco de 30 grados de longitud eclíptica y 9 grados de latitud eclíptica.

Los signos zodiacales son áreas de la esfera celeste que se definen de forma distinta a como se definen las constelaciones del mismo nombre, de modo que un signo zodiacal dado y la constelación de su mismo nombre cubren áreas distintas de la esfera celeste.

En1930 la Unión Astronómica Internacional estableció que la constelación de Ofiuco o Serpentario se encuentra en la zona del Zodiaco. Sin embargo, en la Astrología tradicional basada en la cultura babilónica no se suele considerar como signo zodiacal.

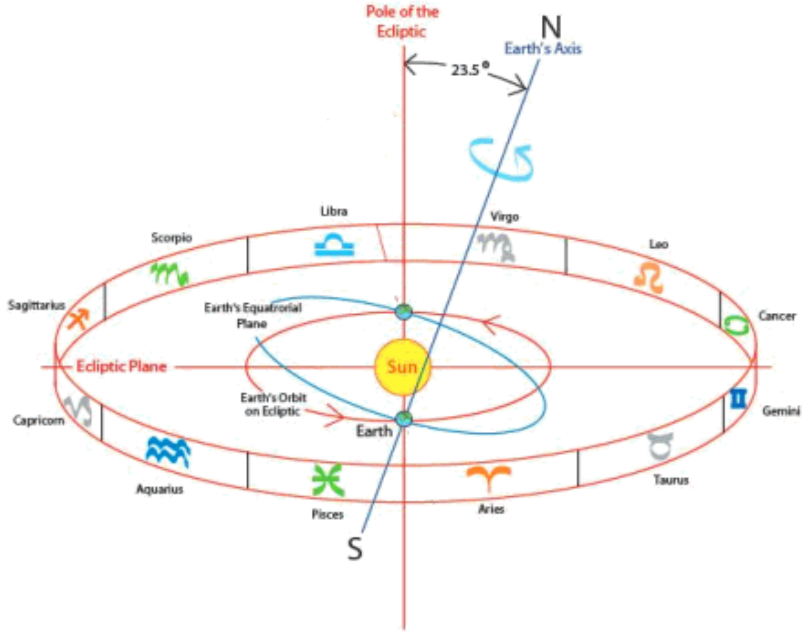


Figura 3: La zona zodiacal y los 12 signos del Zodiaco.

Después de la presentación astronómica hecha más arriba para saber en que terreno de esta ciencia nos movemos, es conveniente retomar el trabajo para el fin que nos hemos propuesto. Este no es otro que presentar algunas actividades y cálculos astronómicos que se pueden realizar en los solsticios y equinoccios. Recordemos que llamamos *equinoccios* a los puntos de intersección del ecuador y la eclíptica. En la Fig.1 pueden verse los equinoccios de primavera y de otoño. Así mismo, cuando el Sol está en su punto más alto sobre el ecuador (ε), es el *solsticio de verano* y cuando esta a ($-\varepsilon$) bajo el ecuador es el *solsticio de invierno* en el hemisferio norte.

Actividades y cálculos en los equinoccios

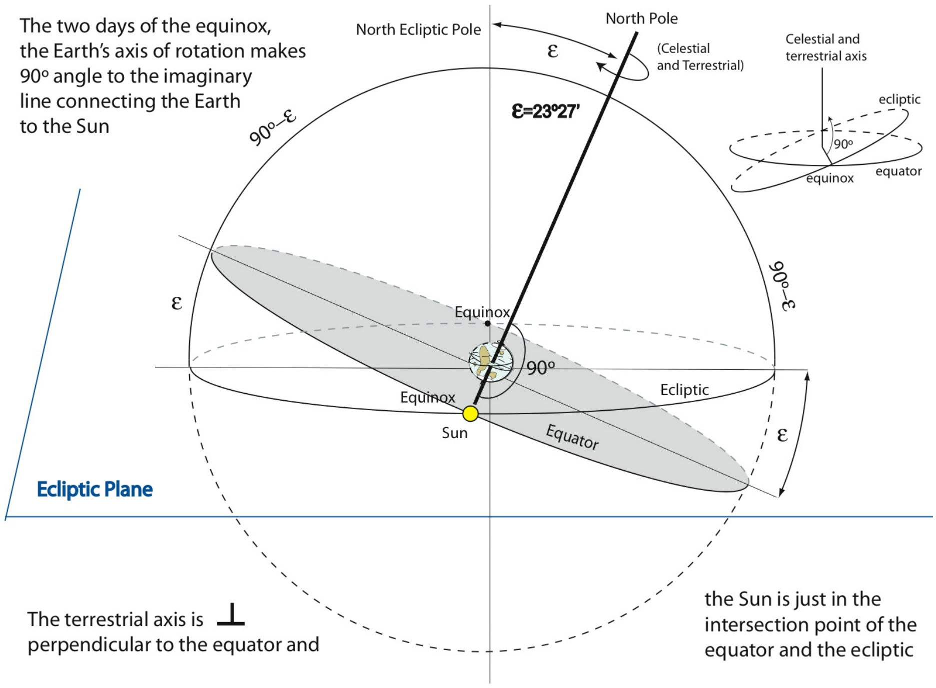


Figura 4: El eje de rotación de la Tierra forma un ángulo de 90º con la línea imaginaria que une la Tierra al Sol.

Cada año, hay dos días especiales en los que cada lugar de la Tierra, dividida uniformemente entre el día y la noche, recibe la misma cantidad de luz solar (12 horas): son los equinoccios.

Esos dos días se da la circunstancia de que el eje de rotación de la Tierra forma un ángulo de 90º con la línea imaginaria que une la Tierra y el Sol. En la figura 4 se representa esta situación. En la figura grande es posible que debido a la perspectiva no se aprecie que el ángulo que forman las dos líneas más gruesas (del Polo Norte al centro de la Tierra y de la Tierra al Sol) es de 90º. Por ese motivo se ha representado el esquema bajo otro punto de vista, arriba a la derecha de la misma figura.

Como resultado, cada lugar de la Tierra pasa exactamente la mitad del día disfrutando de la luz del Sol y la otra mitad del día, sin luz solar, disfrutando de la noche. Y el resultado es el que puede observarse en la figura 5.

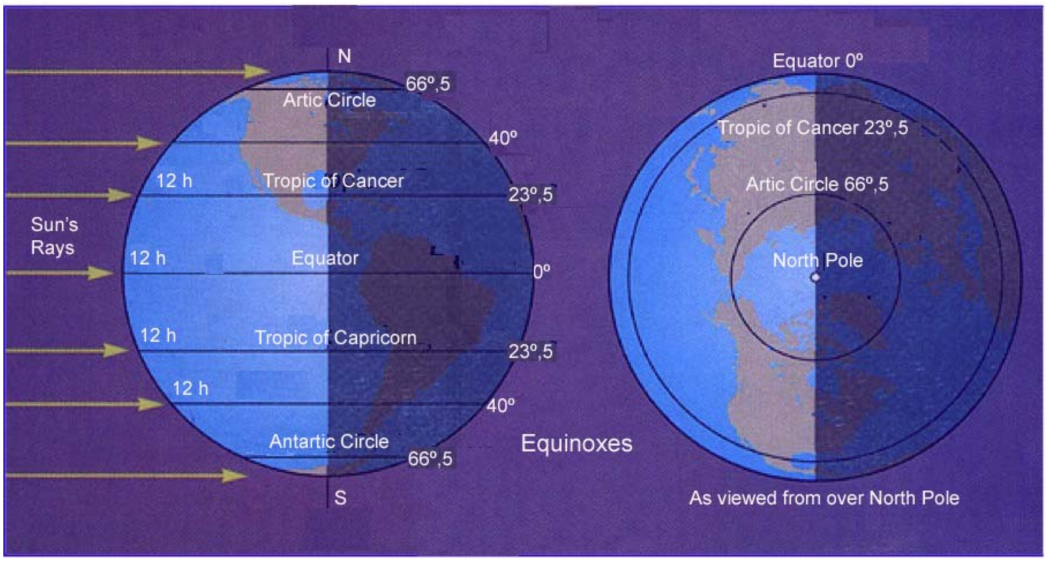


Figura 5: 12 horas de Sol y 12 de oscuridad en todo el planeta.

Actividad 1: Calculo de la latitud de un lugar

El día del equinoccio algo muy interesante ocurre justo cuando el Sol alcanza su punto más alto sobre el horizonte.

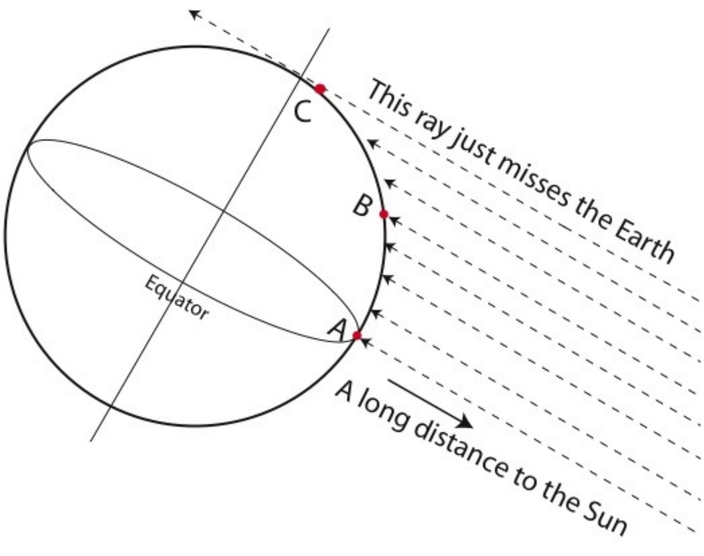


Figura 6: Incidencia de los rayos del Sol sobre la Tierra en los equinoccios.

En ese momento, el ángulo que el Sol forma con un lugar cualquiera en la Tierra determina **exactamente la latitud de ese lugar**. Veamos por qué es así.

En el equinoccio, el Sol que recorre el ecuador, pasará *directamente sobre la cabeza* de un observador situado en el ecuador. Pero para alguien en cualquier otra latitud, debido a que la Tierra es curva, el Sol nunca llega a pasar por el cenit de dicho lugar. Observad la figura siguiente (Fig. 6). En ella podemos ver que los rayos del Sol llegan perpendiculares sólo al punto A, es decir a un punto del ecuador.

En cambio, a medida que los lugares se alejan del punto A, la inclinación con que los rayos del Sol llegan a esos lu-

lugares aumenta.
Si estás exactamente en el ecuador (punto A), el Sol alcanza el cenit del lugar y los rayos solares llegan perfectamente perpendiculares a la Tierra, cayendo sobre nuestras cabezas y ningún objeto proyecta sombra sobre ese lugar. Pero en cualquier otra latitud, independientemente de lo cerca que el Sol esté de alcanzar su máxima altura sobre el horizonte, siempre todas las personas y objetos proyectaran sombra.
Cuando un objeto proyecta su sombra más corta durante el equinoccio en cualquier lugar de la Tierra a excepción del ecuador, es cuando se puede saber cual es la latitud del lugar en el que estamos trabajando.

¿Cómo podemos calcular la latitud de un lugar?
La latitud del lugar puede calcularla quien quiera de una forma muy sencilla. Para ello basta con:

1. buscar un lugar muy llano, nivelado, y clavar en él un palo perfectamente perpendicular al suelo,
2. medir la longitud del palo desde el suelo al extremo superior,
3. medir la longitud de su sombra más corta sobre el suelo y
4. aplicando algo de geometría … podemos obtener la latitud que buscamos.

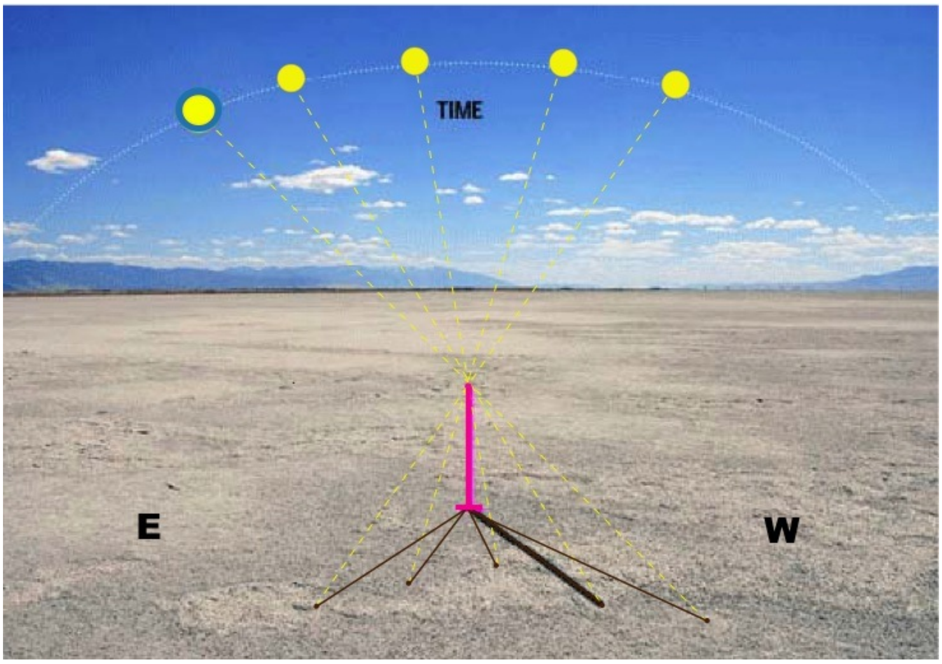


Figura 7: El Sol proyecta la sombra del palo en diferentes puntos del horizonte dependiendo de su posición en el cielo.

Vamos a ver ahora como aplicamos la geometría partiendo de la figura 7. En primer lugar representamos en un sistema de coordenadas, tiempo-longitud de la sombra, los extremos de las sombras del palo proyectados en el suelo. Esos puntos al unirlos representa una rama de hipérbola (Fig.8a). El vértice de la rama de la hipérbola corresponde a la proyección del palo cuando el Sol alcanza su máxima altura sobre el horizonte y en ese momento, mediodía local, la sombra es mínima.
Si miramos la figura 8b observamos fácilmente que tenemos un triángulo rectángulo en el que el ángulo superior es la latitud del lugar, objeto de nuestro estudio. Así tenemos:

$$\mathrm{tn}\left(\mathrm{latitude}\right) = \frac{\text{minimum length of shadow}}{\text{longitude of stick}}$$

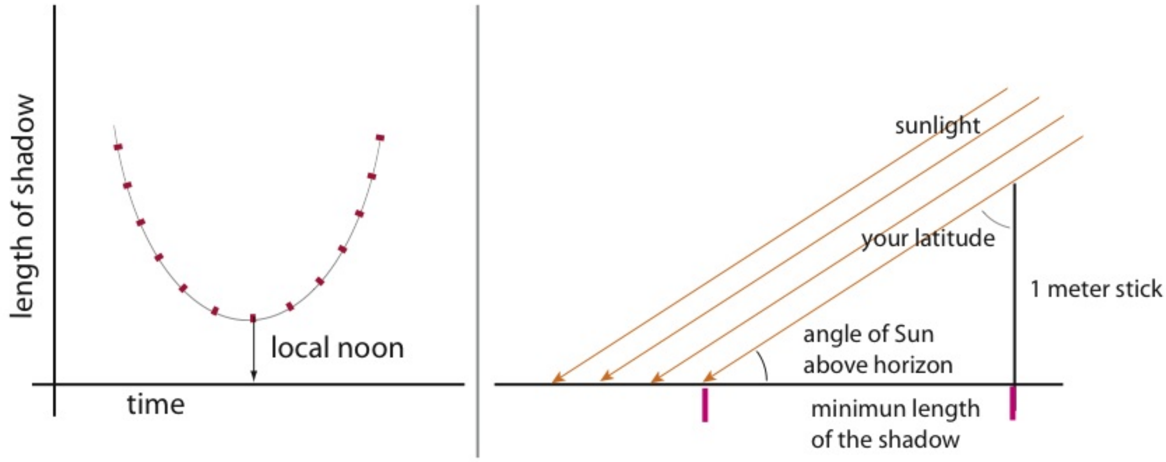


Figura 8: a) Unión de los extremos de las sombras proyectadas por el palo. b) Triángulo a resolver.

$$\text{latitude of the place} = \text{Arctn}(\text{latitude})$$

Así, el ángulo que medimos cuando el Sol alcanza su máxima altura sobre el horizonte el día del equinoccio, en grados, define cual es la latitud en cualquier lugar de la Tierra.

Observemos la figura siguiente (Fig. 9).

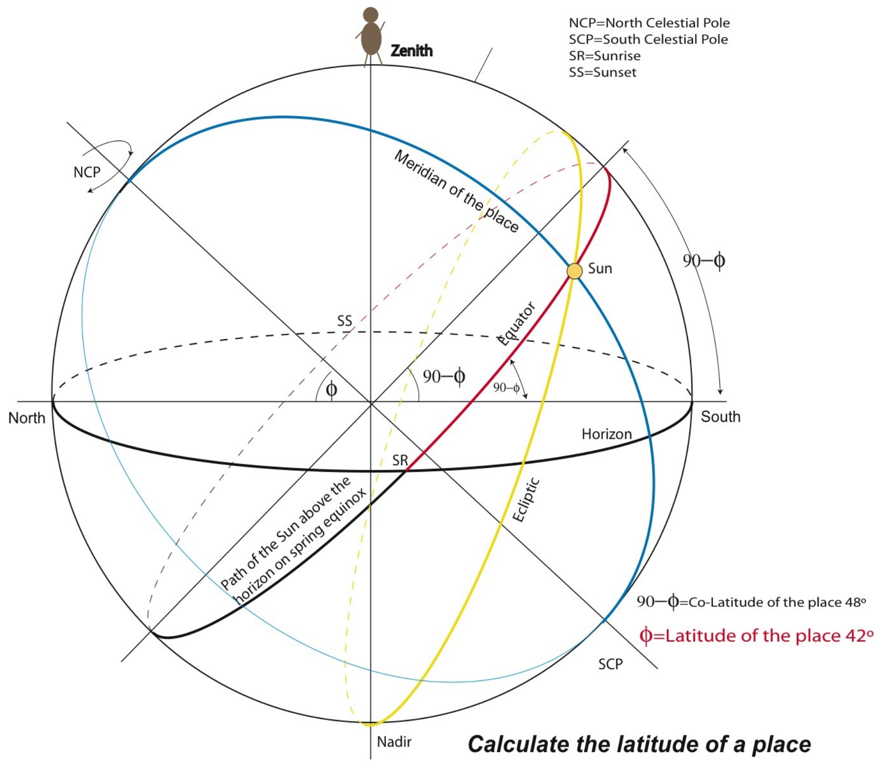
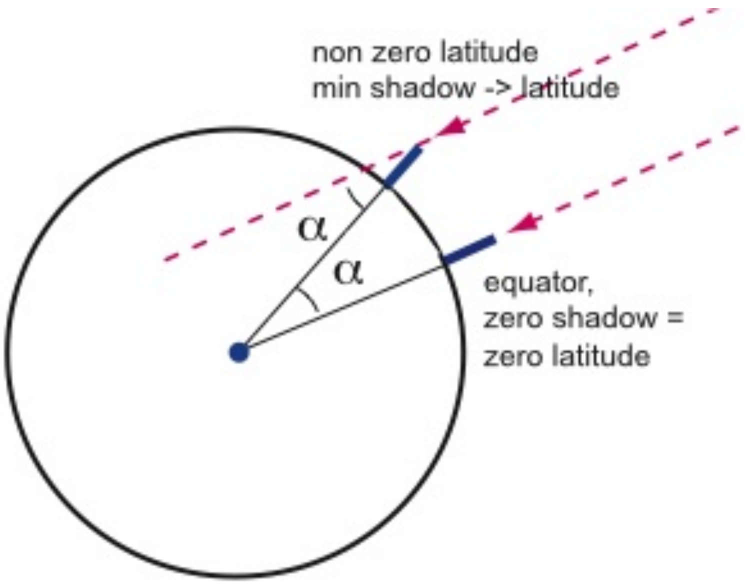


Figura 9: La altura máxima angular que alcanza el Sol en el Sur, al mediodía, es la colatitud del lugar.

También podemos determinar la latitud midiendo directamente la máxima altura angular que alcanza el Sol justo al mediodía, cuando está sobre el punto cardinal Sur. Esta máxima altura angular es la colatitud 90-ϕ, siendo la latitud del lugar ϕ.
Una manera directa de medir las alturas angulares es utilizando el goniómetro vertical (Fig.10). Un instrumento muy sencillo de construir por los propios alumnos en la clase y también muy sencillo de utilizar. Además puede resultar útil también para la resolución de problemas de trigonometría en la clase de matemáticas.

Figura 10: Un ejemplo sencillo de goniómetro vertical.



Con la misma técnica, aplicada durante los equinoccios en cualquier lugar del mundo, podremos obtener la latitud del lugar en el que nos encontremos.

Figura 11: Sombras en el ecuador y en un lugar cualquiera de la Tierra.

Actividad 2: Determinación de la Pascua Cristiana

Los primeros cristianos, que eran judíos, celebraban la Pascua de Resurrección al mismo tiempo que la Pascua judía, hasta que el Primer Concilio de Nicea (en el 325 d. C.) separó la celebración de ambas Pascuas, quitando a la celebración cristiana los elementos hebreos.

La Pascua, también llamada Pascua Florida, Domingo de Pascua, Domingo de Resurrección o Domingo de Gloria, es la fiesta central del cristianismo, en la que se conmemora, de acuerdo con los evangelios, la resurrección de Jesucristo al tercer día después de haber sido crucificado. La Pascua marca el final de la Semana Santa.
El Domingo de Pascua es una celebración que no se fija en relación al calendario civil. El primer Concilio de Nicea (325 d.C) estableció que la fecha de celebración de la Pascua fuese el primer domingo después de la luna llena tras el equinoccio de primavera en el hemisferio norte. Esto se debió a la gran confusión que reinaba a principios del siglo

Figura 12: Dionisio el Exiguo

siglo IV para la conmemoración de la Pascua ya que habían surgido numerosas tendencias en grupos de practicantes que utilizaban sus propios cálculos.
No obstante, siguió habiendo diferencias entre la Iglesia de Roma y la de Alejandría, si bien el Concilio de Nicea dio la razón a los alejandrinos, estableciéndose la costumbre de que la fecha de Pascua se calculase en Alejandría, que lo comunicaba a Roma para que lo difundiera al resto de la cristiandad.
Pese a este acuerdo formal, las discrepancias continuaron por razones astronómicas. La Iglesia romana consideraba que el equinoccio de primavera era el 18 de Marzo y para calcular la edad de la Luna (epacta) utilizaban un ciclo de 84 años. En cambio los alejandrinos para ese cálculo usaban el famoso ciclo metónico de 19 años. Estas diferencias, y otras menores, hacían que en la Iglesia romana la Pascua nunca cayese con posteridad al 21 de Abril, mientras que en la alejandrina podía llegar hasta el 25.

Finalmente, en el año 525, Dionisio el Exiguo (Fig.12) convenció a todos desde Roma de las bondades del cálculo alejandrino, unificándose al fin el cálculo de la Pascua cristiana. La fecha así, puede variar entre el 22 de Marzo y el 25 de Abril del calendario gregoriano que es el usado en occidente. El cristianismo oriental basa sus cálculos en el calendario juliano, por lo que su fecha puede ir desde el 4 de Abril al 8 de Mayo.

Para el cálculo se establecen unas premisas iniciales:

1. La Pascua ha de caer en domingo.
2. Este domingo ha de ser el siguiente al primer plenilunio pascual después del comienzo de la primavera boreal o equinoccio de primavera en el hemisferio norte. Si la luna llena cayese en domingo, la Pascua se trasladaría al siguiente domingo.

La justificación de los cálculos para la determinación de esta fecha es bastante tediosa y complicada ya que necesita la introducción de conceptos como: la letra dominical (L), el número de oro (n) para determinar la epacta (E) y llegar a la fórmula de la Pascua –- P= 45 – E+(E+L+1)7 ---, que nos dará la fecha de Pascua contada en días a partir del primero de Marzo.

Si queremos saber sin más la fecha, podemos buscar en la web la entrada "Cálculo automático de la fecha de Pascua y de la Semana Santa" y en páginas como la siguiente http://divvol.org/recursos/fecha_pascua.htm , introduciendo un año entre el 1583 y 2499 nos calcula de forma instantánea la fecha de Pascua para el año elegido.

Si queremos hacer los cálculos por nosotros mismos, existe un algoritmo llamado **algoritmo de Butcher**, del *Almanaque Eclesiástico* de 1876. Es válido solo para cualquier año posterior a 1583 del calendario gregoriano. El algoritmo es el que sigue:

1) *A* es el resto de dividir *año elegido*/19,
2) *B* es el cociente de la división *año*/100,
3) *C* resto de dividir *año*/100,
4) *D* cociente de dividir *B*/4,
5) *E* resto de dividir *B*/4,
6) *F* cociente de dividir (*B*+8)/25,
7) G cociente de dividir (*B*-*F*+1)/3,
8) *H* resto de dividir (19*A*+*B*-*D*-*G*+15)/30,
9) *I* cociente de dividir *C*/4,
10) *K* resto de dividir *C*/4,
11) *L* resto de dividir (32+2*E*+2*I*-*H*-*K*)/7,
12) *M* cociente de dividir (*A*+11*H*+22*L*)/451,
13) *N*=*H*+*L*-7*M*+114

MES: cociente de N/31 ; DÍA=1+(N mod 31) o bien, DÍA=1+(N-(MESx31))

Como ejemplo vamos a calcular cuando fue el domingo de Pascua del año 2017. Calculamos los parámetros descritos en el algoritmo para este año y nos da:

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*K*	*L*	*M*	*N*
3	20	17	5	0	1	6	21	4	1	4	0	139

MES: cociente de N/31 = cociente de 139/31 = 4; ***Abril***

DÍA=1+(N mod 31) = 1+(139 mod 31) = 1 + 15 = 16 *o bien*

DÍA=1+(N-(MESx31)) =1+ (139-(4x31)) = 1 + 15 = 16; ***Día 16***

Osea, el domingo de Pascua del 2017 fue ***el 16 de Abril****.*

- Como ejercicio os proponemos que determinéis cuando será del domingo de Pascua del año 2030.
- Así mismo os proponemos que determinéis cuando fue el domingo de Pascuas del 2010.

Actividades y cálculos en los solsticios

En los solsticios es diferente. Como ya hemos visto anteriormente en los equinoccios, el ángulo formado por la línea imaginaria Tierra-Sol y el eje terrestre o celeste es de 90º (Fig.4). En cambio en los solsticios alcanza, en el solsticio de invierno su máxima diferencia de 90º y en el solsticio de verano su mínima diferencia de 90º (Fig.13). El solsticio de verano se produce cuando el Sol alcanza una declinación de ε=23º27' sobre el ecuador y el solsticio de invierno cuando la declinación es de -ε (Fig. 1).

Así, podemos preguntarnos pues: ¿cómo es de diferente el comportamiento del sistema Tierra-Sol-Eje Rotación en los solsticios que en los equinoccios? ¿Y por qué?

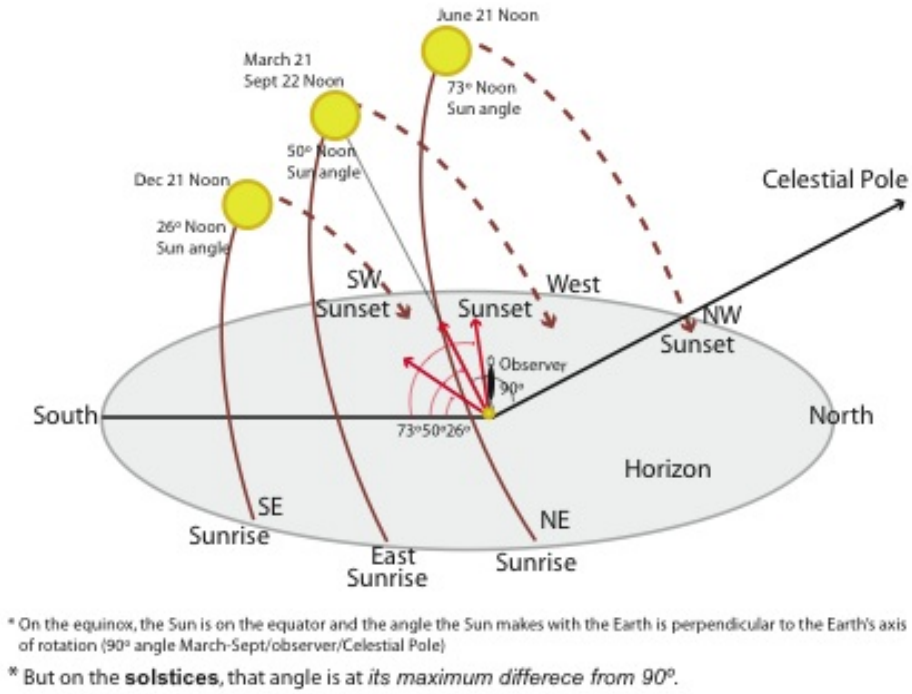


Figura 13: Alturas máximas que alcanza el Sol sobre el horizonte en los solsticios y equinoccios.

En la figura 13 se representan, para un lugar de una latitud similar a la de Madrid, las máximas alturas que alcanza el Sol sobre el horizonte en los solsticios y equinoccios.

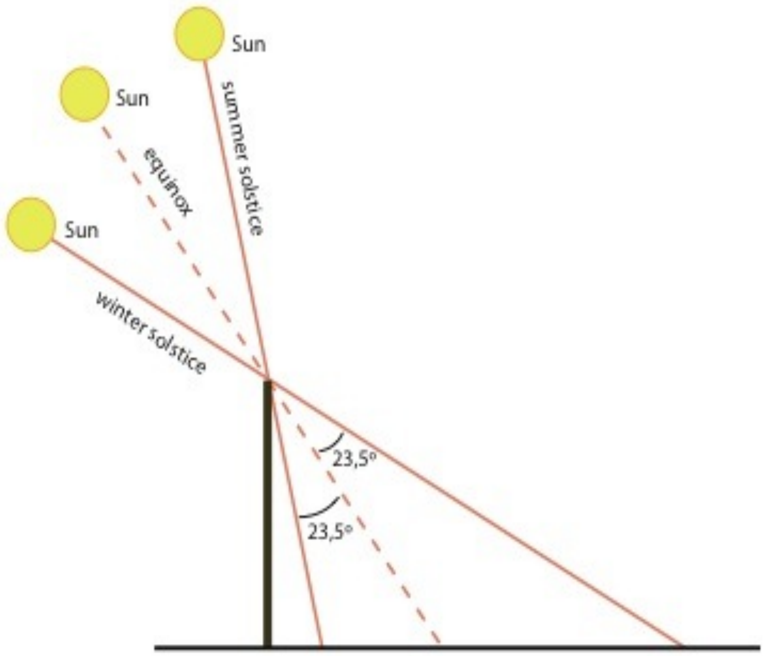
In[1]:= Latitud$[Madrid]   Out[1] = deg[40, 24, 34.8]

Utilizando el programa para *Mathematica, AstroMath* de Alberto Abad, podemos comprobar que lo que hemos dibujado en la figura 13, se corresponde con lo que ocurre en un lugar de latitud similar a la de Madrid.

```
In[2]:= AlturaPasoMeridiano$[Sol, Madrid, cal[2017, 3, 20]]
        AlturaPasoMeridiano$[Sol, Madrid, cal[2017, 6, 21]]
        AlturaPasoMeridiano$[Sol, Madrid, cal[2017, 9, 22]]
        AlturaPasoMeridiano$[Sol, Madrid, cal[2017, 12, 21]]          (1)

Out[2]= deg[49,25.9]
Out[3]= deg[73,1.5]
Out[4]= deg[49,54.89]
Out[5]= deg[26,9.44]
```

Como nos pica la curiosidad vamos a ver que la diferencia en los solsticios es a causa de la inclinación del eje de rotación de nuestro planeta. En otras palabras, esa diferencia nos dice exactamente, cuál es la inclinación del eje terrestre respecto de la eclíptica.



También sería interesante observar que el ángulo central que separa dos trayectorias rojas, consecutivas en el dibujo (fig.13) es de 23,5º. Es decir, la distancia angular entre la posición del Sol en su trayectoria del solsticio de invierno y la posición en su trayectoria en los equinoccios es de 23,5º, al igual que la distancia angular entre las trayectorias de los equinoccios y el solsticio de verano (atención ¡no sobre el horizonte!).

Figura 14: Alturas máximas que alcanza el Sol sobre el horizonte en los solsticios y equinoccios.

Eso se debe a que el Sol en su trayectoria imaginaria sobre la esfera celeste corta al ecuador, como ya se ha dicho en el párrafo primero de este trabajo, en dos puntos, Aries y Libra, y la máxima declinación del Sol es de 23,5º y la mínima de -23,5º (Fig.1). Los días de los equinoccios la declinación es 0º ya que el Sol esta en el ecuador.

Actividad 1: Medición de la inclinación del eje terrestre en los solsticios.

Si conocemos la latitud del lugar de observación podemos determinar la inclinación del eje de la Tierra. Esto es podemos calcular ε.

La forma más sencilla y directa es la que exponemos a continuación. Esta forma consiste en medir directamente la altura del Sol el día del solsticio de verano. Para ello tenemos que tratar de hacer la medición lo más precisa posible utilizando un goniómetro vertical, como el que representa la figura 10, un astrolabio, un teodolito o cualquier otro instrumento que sirva para medir alturas angulares.

En la figura 15 hemos representado la altura máxima que alcanza el Sol sobre el horizonte el día del solsticio de verano ($\approx$ 21 de Junio). A esa altura, en la fig.15 la hemos llamado **A**. Si nos fijamos también en la figura 9, observamos que la altura angular desde el horizonte hasta el ecuador es 90-ϕ, siendo ϕ la latitud del lugar.

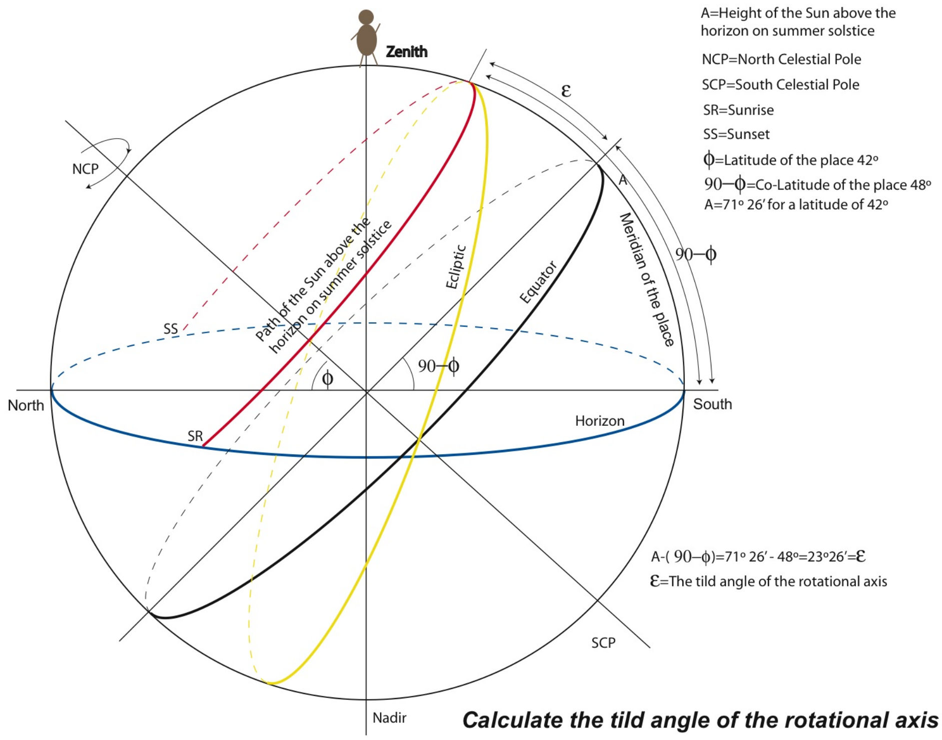


Figura 15: Cálculo de ε, ángulo del eje de rotación de la Tierra respecto de la eclíptica (ϕ =42).

Como hemos supuesto que la latitud la conocemos, también conocemos la colatitud. Si a la altura **A** que hemos medido con el goniómetro le restamos la colatitud, que es la altura que alcanza el Sol el día del equinoccio, es decir el día que el Sol está sobre el ecuador, resulta que la diferencia que queda será la máxima declinación que alcanza el Sol sobre el ecuador el día del solsticio de verano, esto es 23,5º. Y podemos ver sin demasiada dificultad que este valor es justo la inclinación del eje terrestre o de rotación respecto de la eclíptica.

Estamos habituados a ver la inclinación del eje de rotación de una determinada manera, generalmente como nos presentan el globo terráqueo de la Fig. 16.

Vamos a ver que el valor de ε=23,5º que hemos obtenido midiendo la máxima altura **A** que alcanza el Sol sobre el horizonte, al mediodía el día del solsticio de verano, corresponde justamente a la inclinación del eje terrestre.

Para ello, rotaremos la figura 15 de forma que nos quede la eclíptica en posición horizontal (mirad la figura 2).

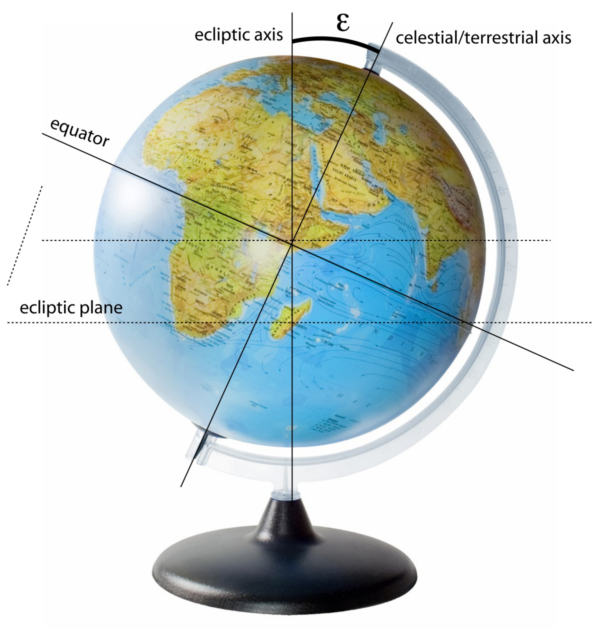


Figura 16: Posición del globo terráqueo como habitualmente lo usamos.

Una vez rotada la imagen 15, y observando la figura 17, por ángulos complementarios, podemos observar que el ángulo que forma el eje eclíptico con el polo norte celeste/terrestre (NCP) es igual que el formado por el ecuador y la eclíptica: ε. Por lo que ε=23,5º, corresponde a la inclinación del eje de rotación terrestre.

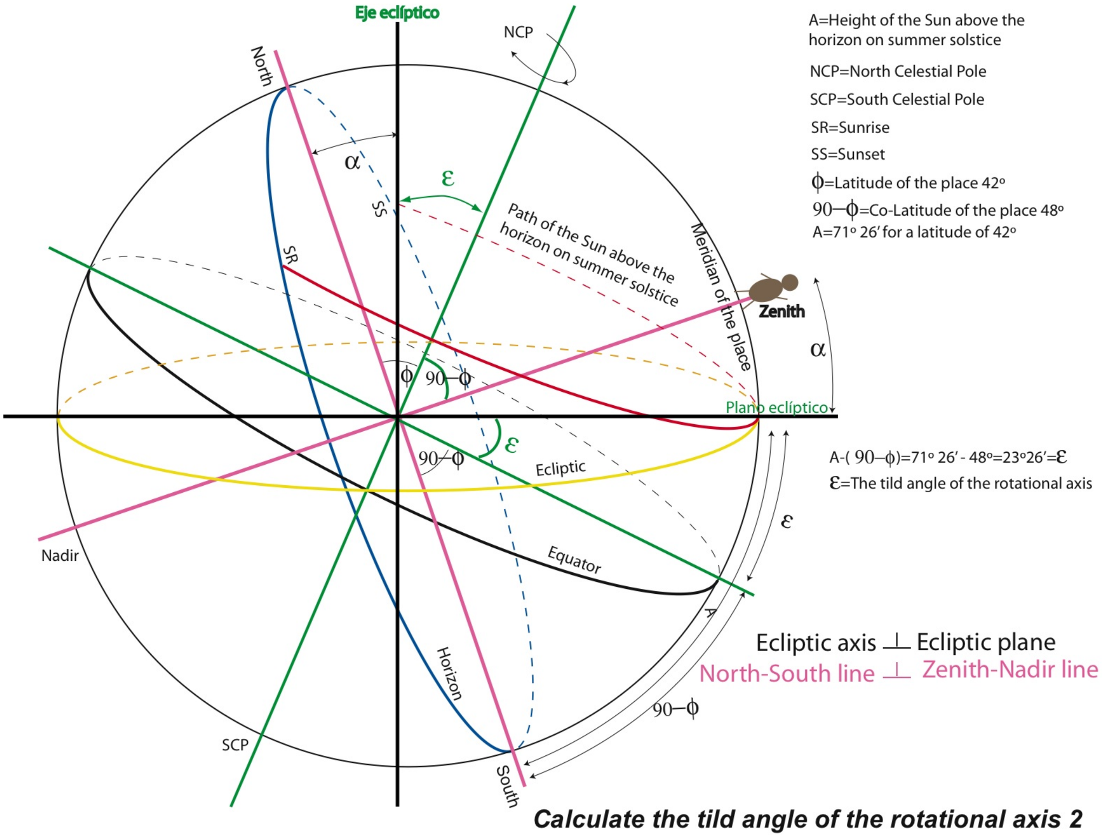


Figura 17: Figura 15 rotada de forma que el plano eclíptico es el plano horizontal (ϕ =42).

Bien, hemos visto como podemos calcular la inclinación del eje de rotación terrestre el día del solsticio de verano. Pero,

¿*Podríamos calcular también este ángulo* ε *el día del solsticio de invierno*?

Veamos:

In[1]:= A=Latitud$[Madrid] Out[1]= deg[40,24,34.8]
In[2]:= B=gms[90,0 ,0] Out[2]= deg[90,0,0] (2)
In[3]:= B-A= Colatitud= 90º- ϕ Colatitud=Out[3]= deg[49,35,25.2]

Anteriormente ya hemos calculado la máxima altura **A**, que alcanza el Sol en Madrid el día del solsticio de invierno (expresiones (1)) que es Out[5] = deg[26,9.44].
Para el solsticio de invierno, con los datos anteriores se determina el ángulo de inclinación del eje terrestre, también llamado oblicuidad de la eclíptica, de la forma siguiente: *Colatitud del lugar menos* **A***, la máxima altura que alcanza e Sol sobre el horizonte ese día*. Es decir:

ε = (90º- ϕ) – **A** = 49º35’25” – 26º9’26.5’’ ≈ **23º26’** (3)

Ejercicio 1: *¿Qué ocurrirá si operásemos igual para el solsticio de invierno que para el de verano?* Es decir, que a la máxima altura que alcanza el Sol el día del solsticio de invierno le restásemos la colatitud del lugar. Esto es:

A – (90º- ϕ) = 26º9’26.5” – 49º35’25” ≈ **–23º26’** = – ε (4)

¿Podrías explicar el significado de este resultado? (relacionado con la declinación δ del Sol)

Ejercicio 2: Representar gráficamente que las operaciones (3) y (4) son válidas siguiendo las pautas de las figuras 15 y 17.

Ejercicio 3: Calcula la máxima altura del Sol cualquier día del año y repite las operaciones (3) y (4) con ese valor y la colatitud que ya conoces. Al no ser los días de los equinoccios el resultado que obtienes no es ε, es decir, no es el valor de la inclinación del eje de rotación de la Tierra ¿Sabrías explicar cuál es el significado del resultado que obtienes?

Actividad 2: Calculo de la distancia angular entre los puntos de salida del Sol sobre el horizonte en un solsticio y un equinoccio consecutivos o viceversa.

Sabemos por nuestra observación diaria que el Sol sale y se pone cada día por un punto distinto del horizonte. Pero desde pequeños nos han enseñado que el Sol sale por el punto cardinal Este y se pone por el Oeste y eso es cierto, pero únicamente para dos días al año: el día que empieza la primavera (equinoccio de primavera) y el día que empieza el otoño (equinoccio de primavera).

Si observamos la salida del Sol por un punto determinado **A** del horizonte un día de equinoccio de primavera ($\approx$21 de Marzo) y, repetimos la observación 15 más tarde, veremos que el punto por donde aparece el Sol se ha desplazado hacia el Norte. Ese desplazamiento hacia el Norte se va a seguir produciendo durante aproximadamente tres meses hasta alcanzar el máximo (un punto en el noreste) para esa latitud, que se producirá el día del solsticio de verano ($\approx$21 de Junio). A partir de ese día el Sol irá deshaciendo el camino recorrido sobre el horizonte en sus salidas, hasta llegar de nuevo al punto **A** o punto cardinal Este. De la misma manera, si consideramos el equinoccio de otoño en el que el Sol aparece igualmente por el punto A o Este ($\approx$21 de Septiembre) y seguimos observando periódicamente esas salidas del Sol veremos que el desplazamiento sobre el horizonte ahora lo realiza hacia el Sur, alcanzando el máximo desplazamiento (en un punto del sureste) el día del solsticio de invierno ($\approx$21de Diciembre) y comenzar a partir de ese día su retroceso hasta alcanzar de nuevo el punto A o Este en el siguiente equinoccio de primavera.
Lo explicado para salidas de Sol sirve igualmente si se prefiere trabajar con las puestas.

Figura 18: Composición de cuatro fotografías de las salidas del Sol en los cuatro días de los inicios de las cuatro estaciones del año.

Si somos capaces de guardar en nuestra retina, de forma aproximada (ayuda mucho tener algunas referencias en el horizonte), los puntos por los que hemos visto amanecer el Sol en los solsticios y equinoccios nos sorprende la enorme distancia entre unos y otros y, nos preguntamos **¿qué distancia angular separa un solsticio de un equinoccio y, entre dos solsticios? ¿Y, cómo la mediremos?**

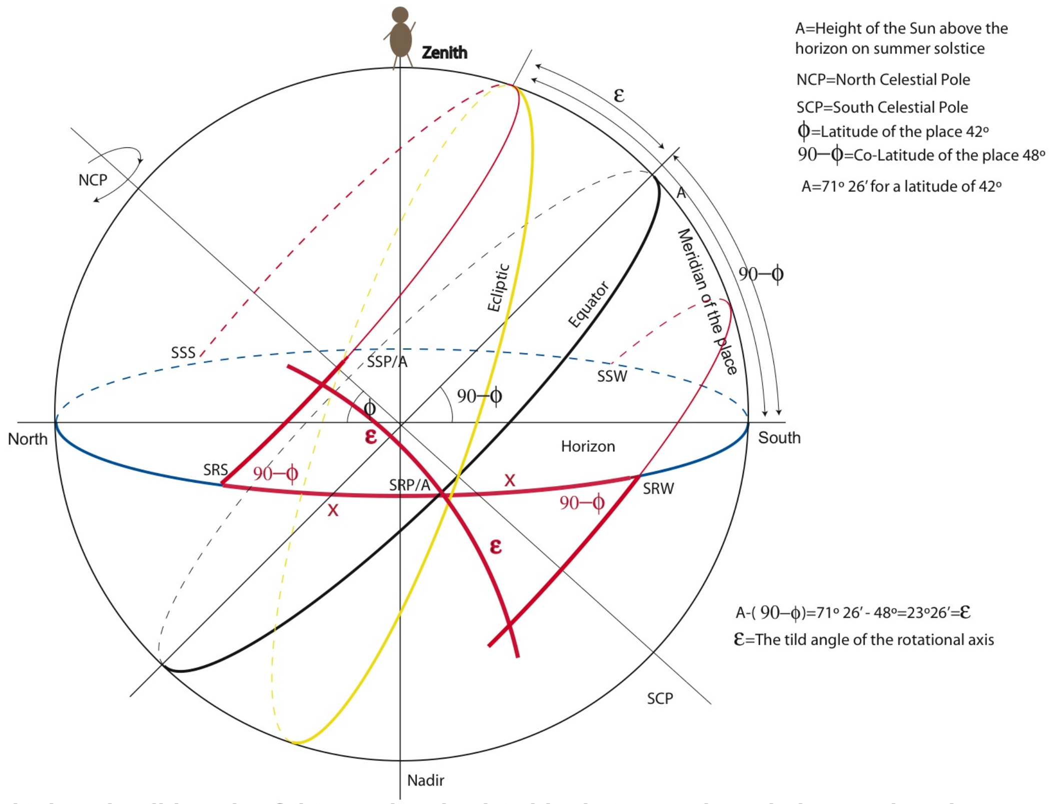
Empezaremos llamando **x** a la distancia angular entre los puntos de salida del Sol en un solsticio y un equinoccio y suponemos conocida ε, oblicuidad de la eclíptica o inclinación del eje terrestre.

Para calcular **x** haremos una fotografía de las cuatro salidas o de las cuatro puestas de Sol en el primer día de cada una de las cuatro estaciones (los dos solsticios y los dos equinoccios). Para ello elegiremos un lugar con el horizonte lo más despejado posible. Es preciso que las cuatro fotografías se realicen desde el mismo emplazamiento y con un encuadre que nos permita relacionar cada fotografía con la realizada en la siguiente estación. Es aconsejable utilizar trípode.

Aunque dos fotografías de dos estaciones consecutivas son suficiente para calcular **x** , es aconsejable hacer las cuatro para poder hacer un promedio y ajustar más el resultado.

La figura 18 nos muestra la composición fotográfica de las cuatro salidas del Sol en los solsticios y equinoccios en un lugar determinado. Sería aconsejable para obtener una mayor precisión en los cálculos que el lugar elegido fuese más llano que lo que muestra nuestra imagen 18.

La situación que se muestra en la figura 18, en la esfera celeste nos viene dada por la imagen siguiente (Fig. 19), relacionada directamente con la figura 15.



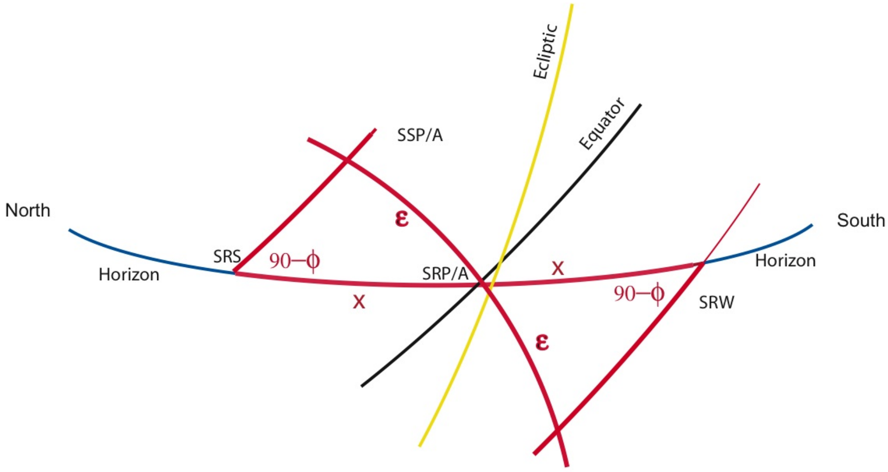
Calculate the tild angle of the rotational axis with photos on the solstices and equinoxes

Figura 19: Representación de las salidas y puestas del Sol y su relación con **ε.**

Para determinar el valor **x** entre un equinoccio y el solsticio siguiente tenemos que trabajar con los triángulos esféricos marcados en rojo en la figura 19 que, extraídos de la misma nos lleva a la siguiente figura 20.

En la figura 20 observamos que en los dos triángulos en rojo se cumple la siguiente relación:

$$\frac{sen\,x}{sen\,90} = \frac{sen\,\varepsilon}{sen(90-\phi)} \quad \Rightarrow \quad sen\,x = \frac{sen\,\varepsilon\,.\,sen\,90}{sen\left(90-\phi\right)}$$



Calculate the tild angle of the rotational axis with photos in the solstices and equinoxes

Figura 20: Triángulos esféricos par determinar **x** con las fotografías de las salidas de Sol.

Como es conocida la latitud ϕ del lugar desde el que hemos hecho las fotografías, el valor de ε y el sen90º vale 1, podemos calcular:

$$sen\,x = \frac{sen\varepsilon}{\cos\phi} = sen\varepsilon.\sec\phi \quad \Rightarrow \quad x = arcsen\left(sen\varepsilon.\sec\phi\right)$$

que para ε=23º26' y ϕ=42º, la distancia angular **x** entre un solsticio y un equinoccio consecutivos que buscábamos, resulta ser para la latitud considerada de 42º:

$$x = 32{,}36^\circ$$ y por lo tanto,

la distancia angular entre los dos solsticios $2x = 64{,}72^\circ$

Bibliografía

- Abad Medina, A.; *Astronomía y Mathematica: AstroMath*. Zaragoza 1994.
- Català Poch, M.A.; *El calendario Gregoriano*. AAA. Año 6, nº32. Lérida 1987.
- Català Poch, M.A.; *Determinación de la Pascua*. AAA. Lérida 1989.
- *Computus*. https://es.wikipedia.org/wiki/Computus
- Siegel, E.; *Measuring the tild of the Earth on the solstice*. http://scienceblogs.com/startswithabang/
- Viñuales Gavín, E., Ros Ferré, R.M.; *La fotografía, una herramienta para hacer Astronomía.* Mira Editores de Zaragoza. Marzo 1995.

Diciembre 2019